



COMPARAR PARA DEMONSTRAR

Triângulos congruentes ajudam a provar propriedades.

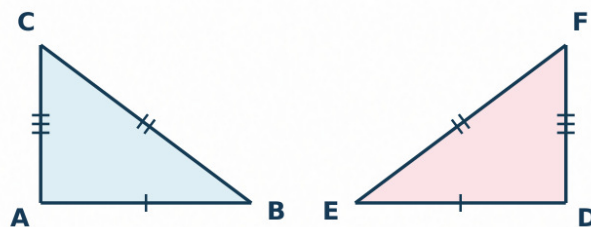
Triângulos congruentes têm a mesma forma e o mesmo tamanho: seus lados e ângulos correspondentes têm medidas iguais. Eles podem estar girados ou refletidos.

Escrever $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ indica a correspondência $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E$ e $C \leftrightarrow F$.

Marcas iguais indicam medidas iguais.
 $\cong$ significa "é congruente a".

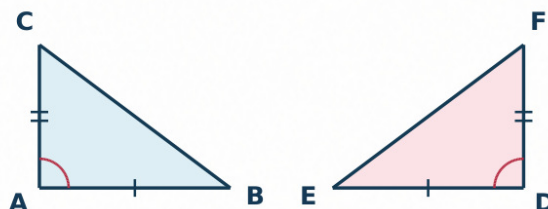
1 LLL: TRÊS LADOS

Três lados de um triângulo têm as mesmas medidas dos três lados correspondentes do outro.



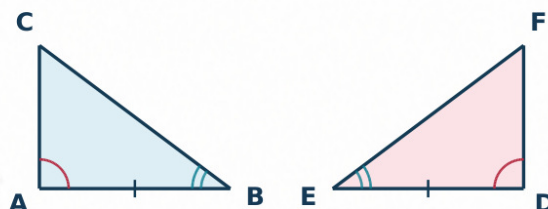
2 LAL: LADO, ÂNGULO, LADO

Dois lados e o ângulo ENTRE eles são congruentes aos correspondentes do outro triângulo.
Não serve um ângulo qualquer.



3 ALA: ÂNGULO, LADO, ÂNGULO

Dois ângulos e o lado ENTRE seus vértices são congruentes aos correspondentes do outro triângulo.



Só três ângulos iguais não garantem congruência: os triângulos podem ter tamanhos diferentes.



Para demonstrar: identifique os dados → escolha um caso de congruência → respeite a correspondência → conclua sobre lados ou ângulos.



OS LADOS OPOSTOS SÃO IGUAIS

Uma demonstração para qualquer paralelogramo.

1 • PARTA DO QUE É DADO

Paralelogramo é um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos.

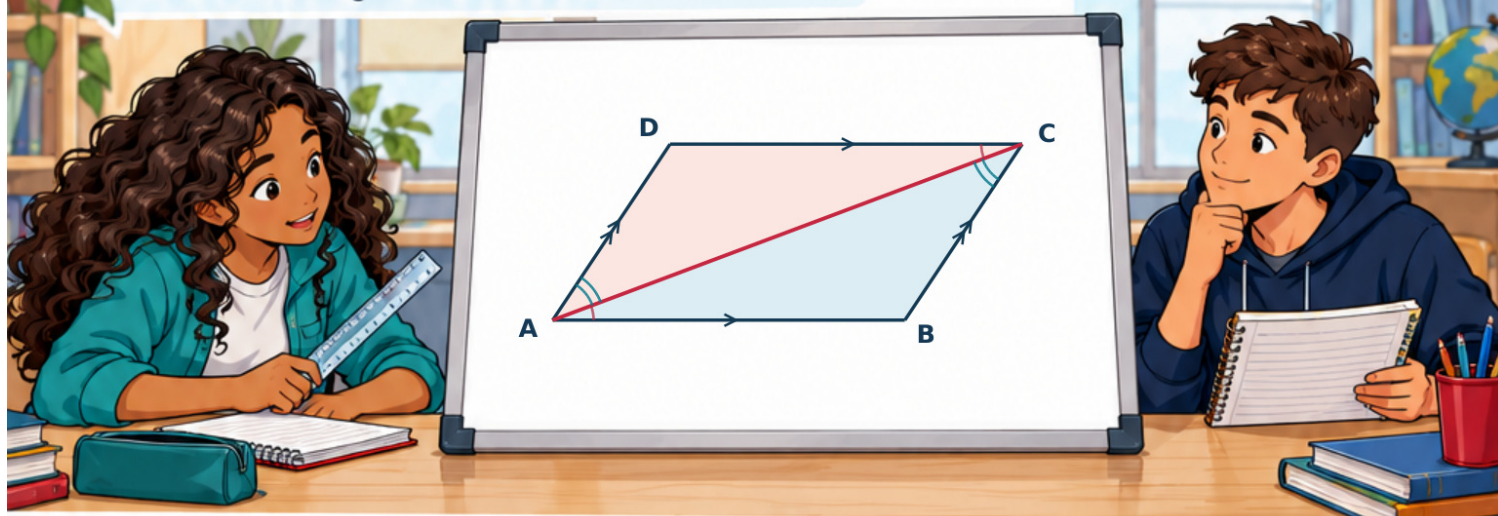
Em ABCD: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Trace a diagonal AC .

Vamos provar $AB = CD$ e $BC = AD$, sem assumir essas igualdades no início.

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos alternos internos têm a mesma medida.

AC corta os dois pares de paralelas. Observe os ângulos nos extremos da diagonal.



2 • IDENTIFIQUE A CONGRUÊNCIA

- 1 $AB \parallel CD \rightarrow \angle BAC = \angle DCA$.
- 2 $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \rightarrow \angle BCA = \angle DAC$.
- 3 $AC = CA$: é o mesmo segmento.
- 4 O lado AC fica entre os dois ângulos comparados. Pelo caso ALA, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.
- 5 Correspondência dos vértices:
 $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D, C \leftrightarrow A$.



3 • USE AS PARTES CORRESPONDENTES

$\overline{AB}$ corresponde a $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ corresponde a $\overline{DA}$.

Portanto, $AB = CD$ e $BC = AD$.

A diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes.



Medir um desenho ajuda a investigar. Demonstrar exige justificar por que a propriedade vale para todos os paralelogramos.

Nome: _____

Data: ____/____/____



DIAGONAIS DO RETÂNGULO

Prove que as duas diagonais têm a mesma medida.

1 • CONSTRUA E NOMEIE

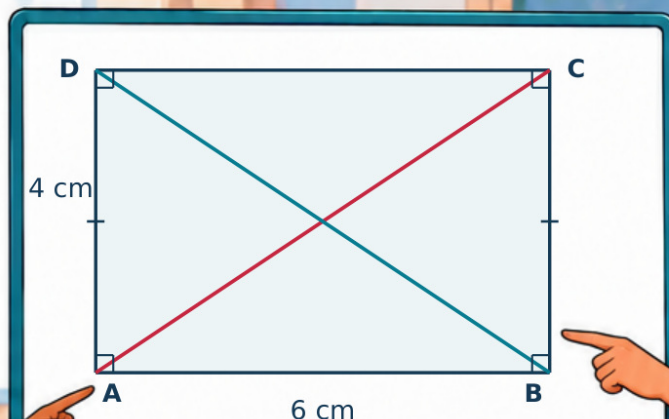
Retângulo tem quatro ângulos retos e também é um paralelogramo.

Trace $AB = 6$ cm.

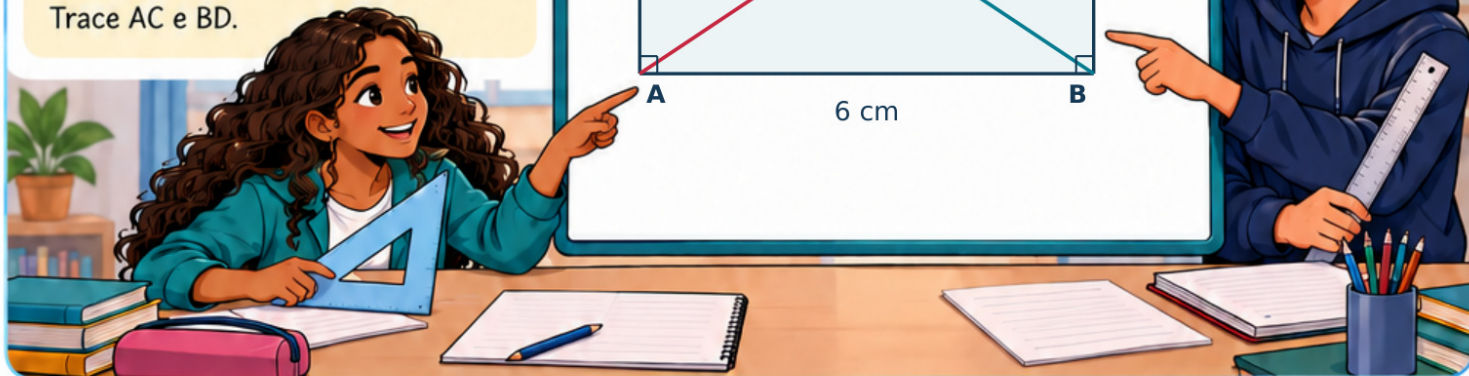
Com esquadro, erga perpendiculares em A e B, no mesmo lado de AB.

Marque $AD = BC = 4$ cm e una D a C.

Trace AC e BD.



Compare os triângulos DAB e CBA.



2 • APLIQUE O CASO LAL

- 1 $AD = BC$: lados opostos do paralelogramo, propriedade já demonstrada.
- 2 $AB = BA$: lado comum.
- 3 $\angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$.
- 4 O ângulo reto está entre os dois lados comparados.
- 5 Logo, $\triangle DAB \cong \triangle CBA$ pelo caso LAL.
- 6 Correspondência dos vértices:
 $D \leftrightarrow C, A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow A$.

No caso LAL, comparamos dois lados e o ângulo entre eles.



3 • CONCLUA E CONFIRA

- DB corresponde a CA. Portanto, $BD = AC$.
- Em outro retângulo, $AC = 13$ cm implica $BD = 13$ cm.

A demonstração vale para qualquer retângulo; não depende das medidas escolhidas para o desenho.



Não basta ser paralelogramo para ter diagonais iguais. Nesta prova, os ângulos retos são essenciais.



Nome: _____

Data: ____/____/____

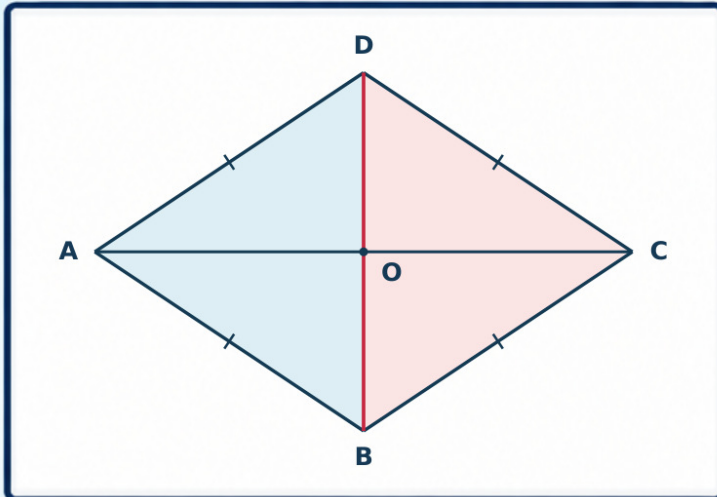


AS DIAGONAIS DO LOSANGO

Duas congruências explicam por que elas são perpendiculares.

1 • USE OS QUATRO LADOS IGUAIS

Losango tem os quatro lados com a mesma medida. As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se encontram em O .



Vamos usar a congruência de triângulos para entender a posição das diagonais.



$AB = CB$, $AD = CD$ e BD é comum.

Pelo caso LLL, $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

Assim, $\angle ABD = \angle CBD$.

Como O está em BD , isso também dá $\angle ABO = \angle CBO$.

2 • COMPARE OUTRO PAR



Agora compare $\triangle ABO$ e $\triangle CBO$:

- $AB = CB$: lados do losango.
- $BO = BO$: lado comum.
- $\angle ABO = \angle CBO$: resultado do passo anterior.

Pelo caso LAL, $\triangle ABO \cong \triangle CBO$.

Logo, $\angle AOB = \angle COB$.

3 • POR QUE O ÂNGULO É RETO?



Como os ângulos $\angle AOB$ e $\angle COB$ são iguais e formam um ângulo raso, cada um mede 90° !

A , O e C estão alinhados. Por isso, $\angle AOB$ e $\angle COB$ somam 180° .

Como são iguais, cada um mede $180^\circ \div 2 = 90^\circ$.

Portanto, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$: as diagonais do losango são perpendiculares.



ATENÇÃO!

Não comece supondo que o ângulo em O é reto: essa é a conclusão que queremos demonstrar.



PARA COMPARAR...

Retângulo: diagonais de mesma medida.

Losango: diagonais perpendiculares.

O **quadrado** possui as duas propriedades, pois é retângulo e losango.

ESCOLHER E JUSTIFICAR

Uma boa demonstração explica os dados, o caso e a conclusão.

1 • OS DADOS SÃO SUFICIENTES?



Compare $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$. Diga se os dados garantem a congruência. Se garantirem, cite o caso.

A: $\overline{AB} = DE$, $AC = DF$ e $\angle BAC = \angle EDF$.

B: $\overline{AB} = DE$, $BC = EF$ e $CA = FD$.

C: os três ângulos correspondentes são iguais.

A: _____

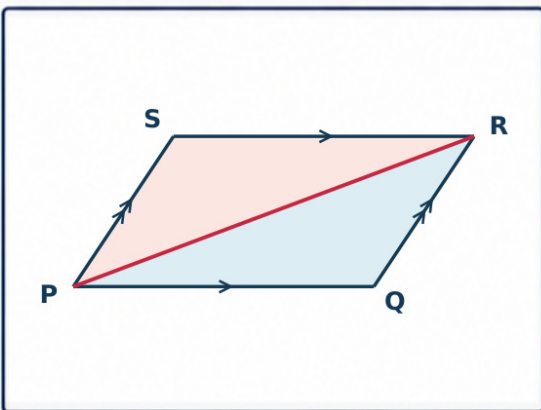
B: _____

C: _____

Justifique especialmente a situação C.

2 • COMPLETE A DEMONSTRAÇÃO

$PQRS$ é um paralelogramo. Foi traçada a diagonal $\overline{PR}$.



$\overline{PQ} \parallel \overline{RS} \rightarrow \angle QPR = \angle$ _____.

$\overline{QR} \parallel \overline{PS} \rightarrow \angle QRP = \angle$ _____.

O lado comum é _____.

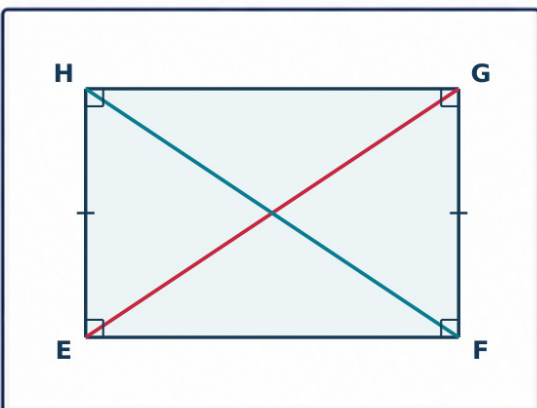
Pelo caso _____, $\triangle PQR \cong \triangle RSP$.

Portanto, $PQ =$ _____ e $QR =$ _____.



3 • DIAGONAIS E UMA INCÓGNITA

$EFGH$ é um retângulo com diagonais $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$.



No caderno, justifique a congruência entre $\triangle HEF$ e $\triangle GFE$ e conclua que $EG = FH$.

Se $EG = 2x + 4$ e $FH = 3x - 1$, determine x e a medida de cada diagonal.

$x =$ _____

Diagonais: _____



Nome: _____

Data: ____/____/____

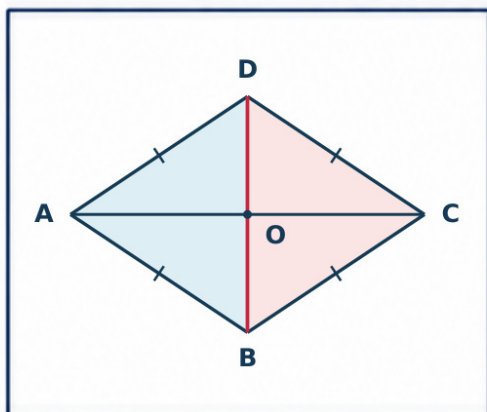


RECONSTRUIR A DEMONSTRAÇÃO

Organize argumentos e reconheça os limites de cada prova.

4 • COLOQUE A PROVA EM ORDEM

No losango ABCD, as diagonais se encontram em O. Numere as etapas de 1 a 5.

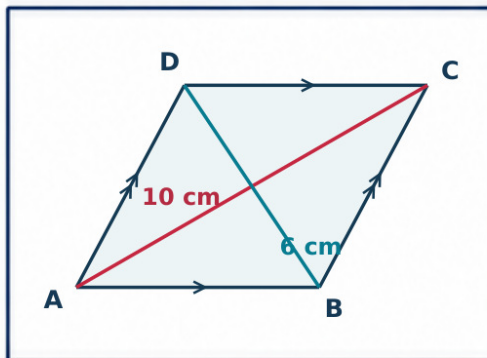


- () Pelo caso LAL, $\triangle ABO \cong \triangle CBO$.
- () $AB = CB$, $AD = CD$ e BD comum dão $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ por LLL.
- () $\angle AOB = \angle COB$ e os dois ângulos somam 180° .
- () Da primeira congruência, $\angle ABO = \angle CBO$.
- () Cada ângulo em O mede 90° ; logo, $AC \perp BD$.



5 • VALE PARA TODO PARALELOGRAMO?

Lia disse: "Posso repetir a prova do retângulo para concluir que todo paralelogramo tem diagonais iguais."



O paralelogramo ilustrado tem $AC = 10$ cm e $BD = 6$ cm. Ele confirma ou refuta a afirmação? Explique qual condição usada na prova do retângulo não está garantida em um paralelogramo qualquer.



6 • CONSTRUA E DEMONSTRE



No caderno, use régua e esquadro para construir um retângulo de lados 5 cm e 3 cm, seguindo o procedimento da mini aula. Nomeie os vértices ABCD em ordem e trace as diagonais. Escreva uma demonstração de que elas têm a mesma medida: indique os triângulos comparados, os dados que permitem concluir a congruência e o caso utilizado. Meça as diagonais apenas para conferir o desenho.

- ☐ Construção e nomes
- ☐ Correspondência
- ☐ Caso justificado
- ☐ Conclusão demonstrada